

No.1 可算集合

この回のゴール

- 2つの集合が対等である（濃度が等しい）ことの定義を述べ、全単射を作って対等性を示せる。
- 可算集合の定義を述べ、 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ が可算であることを示せる。
- 可算集合の部分集合・直積・可算個の和集合が高々可算であることを使える。
- 無限集合が、自分の真部分集合と対等になりうることを説明できる。

■ 1. 対等と濃度

有限集合なら、要素の個数を数えて比べればよい。では、 $\mathbb{N}$ と $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{R}$ の「大きさ」はどう比べればよいだろうか。カントールは、「個数を数える」代わりに「1対1に対応をつける」ことで比べよう、と考えた。いすとお客さんの数を比べるとき、数えなくても、全員を座らせてみて、いすもお客さんも余らなければ同じ数だと分かる。

定義 1 対等・濃度

集合 A から B への全単射が存在するとき、 A と B は**対等**であるといい、 $A \sim B$ と書く。このとき、 A と B の**濃度**（または**基数**）が等しいといい、 $|A| = |B|$ と書く。（本によっては $\text{card } A$, $\#A$, $\overline{A}$ とも書く。）

有限集合については、第2章 No.2 定理2 (3) より、対等なら要素の個数が同じである。逆に要素の個数が同じ n なら、要素に番号をつけて $1, 2, \dots, n$ どうしを対応させれば全単射ができる。つまり有限集合では「対等」と「要素の個数が同じ」は同じことで、**濃度は「個数」を無限集合に広げた考え方である**。

定理 1

集合 A, B, C について、

- (1) $A \sim A$
- (2) $A \sim B$ ならば $B \sim A$
- (3) $A \sim B$ かつ $B \sim C$ ならば $A \sim C$

【証明】 (1) id_A は全単射。 (2) 全単射 $f: A \rightarrow B$ の逆写像 $f^{-1}: B \rightarrow A$ は全単射（第2章 No.3 定理3, 定理4 (1)）。 (3) 全単射 $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ の合成 $g \circ f$ は全単射（第2章 No.3 定理2 (3)）。 □

例 1

次の集合はそれぞれ対等である．矢印の写像が全単射になっている．

- (1) $\mathbb{N} \sim \{2, 4, 6, \dots\}$ (偶数全体): $n \mapsto 2n$.
- (2) $\mathbb{N} \sim \{2, 3, 4, \dots\}$: $n \mapsto n + 1$.
- (3) $\mathbb{N} \sim \{1, 4, 9, 16, \dots\}$ (平方数全体): $n \mapsto n^2$.
- (4) 开区間どうし: $(0, 1) \sim (a, b)$ ($a < b$): $x \mapsto a + (b - a)x$.
- (5) $(-1, 1) \sim \mathbb{R}$: $x \mapsto \tan \frac{\pi x}{2}$. 逆写像は $y \mapsto \frac{2}{\pi} \arctan y$.

例 1 (1)~(3) では, $\mathbb{N}$ が自分の真部分集合と対等になっている．平方数は自然数の中でどんどんまばらになるのに, 「濃度」としては $\mathbb{N}$ と同じなのである (ガリレオもこの不思議さに気づいていた)．有限集合ではこうはならない．真部分集合は要素の個数が真に少ないので, 対等にならない．**無限集合では「全体は部分より大きい」が成り立たないことがある**．さらに (4), (5) から, 長さ 0.001 の区間も実数全体 $\mathbb{R}$ も, 濃度は同じであることが分かる．

■ 2. 可算集合

定義 2 可算集合

$\mathbb{N}$ と対等な集合を**可算集合** (可算無限集合) といい, その濃度を $\aleph_0$ (アレフ・ゼロ) で表す．有限集合または可算集合であることを**高々可算**という．

A が可算 $\iff$ 全単射 $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ がある $\iff A$ の要素を

$$a_1 = f(1), \quad a_2 = f(2), \quad a_3 = f(3), \quad \dots$$

と, **重複なく, もれなく** 一列に並べられる, ということである．本によっては, 有限集合も含めて「可算」と呼び, $\mathbb{N}$ と対等なものを「可算無限」と呼ぶ．また「可付番」という言葉を使う本もある．

例 2

$\mathbb{Z}$ は可算である． $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$ と並べればよい．式で書くと,

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & (n \text{ が偶数}) \\ -\frac{n-1}{2} & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

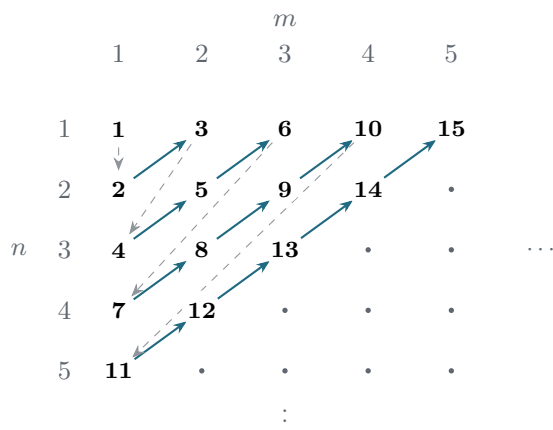
が全単射である ($f(1) = 0, f(2) = 1, f(3) = -1, f(4) = 2, \dots$)． $\mathbb{Z}$ は $\mathbb{N}$ の「約 2 倍」あるように見えるが, 濃度は同じ $\aleph_0$ である．

■ 3. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算

定理 2

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算である.

【証明】 (m, n) を下の図のように並べ、 $m+n$ が等しい「ななめの列」ごとに、 $m+n=2, 3, 4, \dots$ の順に、各列の中では m の小さい順に番号をつける.



$m+n=s$ の列には $s-1$ 個の点があり、それより前の列には $1+2+\dots+(s-2) = \frac{(s-1)(s-2)}{2}$ 個の点がある. よって (m, n) につく番号は

$$f(m, n) = \frac{(m+n-1)(m+n-2)}{2} + m$$

である. どの点にも番号がつき、番号は $1, 2, 3, \dots$ と重複なく、もれなくつくので、 $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ は全単射である. $\square$

第2章 No.2 練習問題7の $f(m, n) = 2^{m-1}(2n-1)$ も、 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ から $\mathbb{N}$ への全単射であった. これを使っても定理2が示せる.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は「 $\mathbb{N}$ が $\mathbb{N}$ 個」並んだものなので、ずっと大きく見える. それでも $\mathbb{N}$ と同じ濃度なのである.

■ 4. 可算集合の性質

定理 3

- (1) 可算集合の部分集合は高々可算である. (無限部分集合なら可算.)
- (2) $A \neq \emptyset$ で、全射 $\mathbb{N} \rightarrow A$ が存在するならば、 A は高々可算である.
- (3) A, B が可算ならば、 $A \times B$ も可算である.
- (4) 各 A_n ($n \in \mathbb{N}$) が高々可算ならば、 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ も高々可算である. (有限個の和集合でも同じ.)

【証明】 (1) 全単射で写して、 $\mathbb{N}$ の無限部分集合 A が可算であることを示せばよい. 「 $\mathbb{N}$ の空でない部分集合には最小の要素がある」ことを使う ($\mathbb{N}$ の整列性. 第4章 No.1 で整列集合として扱う). $a_1 = \min A$, $a_2 = \min(A \setminus \{a_1\})$, $a_3 = \min(A \setminus \{a_1, a_2\})$, $\dots$ と定める (A は無限集合なので、いつも空でない集合の最小値をとっている). $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ なので $k \mapsto a_k$ は単射である. 全射であることを示す. $a \in A$ がどの a_k とも違うとする. $a_k \geq k$ なので $a_k > a$ となる k があり、そのうち最小のものを k とす

る. すると $a \in A \setminus \{a_1, \dots, a_{k-1}\}$ かつ $a < a_k$ となり, a_k がこの集合の最小値であることに矛盾する.

(2) 全射 $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ に対して, $g(a) = \min f^{-1}(\{a\})$ と定める (全射なので $f^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset$). $f(g(a)) = a$ なので $g: A \rightarrow \mathbb{N}$ は単射で (第2章 No.3 定理5 (1)), $A \sim g(A) \subset \mathbb{N}$. (1) より A は高々可算.

(3) 全単射 $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow A$, $\psi: \mathbb{N} \rightarrow B$ を使うと, $(m, n) \mapsto (\varphi(m), \psi(n))$ は $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ から $A \times B$ への全単射. 定理2と定理1 (3) より $A \times B \sim \mathbb{N}$.

(4) 空集合の A_n は除いてよい (すべて空なら和集合は空). $A_n \neq \emptyset$ が高々可算なら, 全射 $g_n: \mathbb{N} \rightarrow A_n$ がある (可算なら全単射, 有限なら $a_1, \dots, a_k, a_k, a_k, \dots$ と最後の要素をくり返せばよい). すると $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_n A_n$, $(m, n) \mapsto g_n(m)$ は全射で, 定理2の全単射 $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ と合成すれば全射 $\mathbb{N} \rightarrow \bigcup_n A_n$ が得られる. (2) より結論を得る. $\square$

(4) の証明にも選択公理が使われている

(4) の証明では, 「各 n について全射 g_n を1つずつ選ぶ」ことを, 無限個の n についていっせいにやっている. 全射 g_n はふつうたくさんあり, 選び方の規則が与えられていなければ, 第2章 No.3 定理5 (2) と同じく**選択公理**が必要になる (第4章 No.3). 例題1のように, 並べ方を具体的に書けるときは選択公理はいらない.

定理 4

$\mathbb{Q}$ は可算である.

【証明】 $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}_{>0}$ (正の有理数全体), $(m, n) \mapsto \frac{m}{n}$ は全射である (同じ有理数に何度でも行くので単射ではない). 定理2の全単射と合成すれば全射 $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}_{>0}$ が得られ, 定理3 (2) より $\mathbb{Q}_{>0}$ は高々可算. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}_{>0}$ なので無限集合で, 可算である. $x \mapsto -x$ により負の有理数全体も可算で, $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_{>0} \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_{<0}$ は定理3 (4) より高々可算. 無限集合なので可算である. $\square$

有理数は数直線のどこにでもぎっしり詰まっている (どんな2つの実数の間にも有理数がある). それでも, 自然数と同じように一列に並べられるのである.

例題 1

整数係数の多項式全体の集合 $\mathbb{Z}[x]$ は可算であることを示せ.

【解答】 n 次以下の整数係数多項式全体を P_n とすると, $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \mapsto (a_0, a_1, \dots, a_n)$ により $P_n \sim \mathbb{Z}^{n+1}$. $\mathbb{Z}$ は可算なので, 定理3 (3) をくり返し使って $\mathbb{Z}^{n+1} = \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}$ は可算. よって P_n は可算. $\mathbb{Z}[x] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n$ なので, 定理3 (4) より高々可算で, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[x]$ (定数多項式) より無限集合だから可算である. (P_n の並べ方は定理2の全単射から具体的に作れるので, ここでは選択公理を使っていない.)

コラム: ヒルベルトのホテル

無限個の部屋 1, 2, 3, ... があり, すべて満室のホテルを考える. 新しい客が1人来たら, 部屋 n の客に部屋 $n+1$ へ移ってもらえば, 部屋1が空く (例1 (2)). 無限人の団体客が来ても, 部屋 n の客に部屋 $2n$ へ移ってもらえば, 奇数番の部屋が全部空く (例1 (1)). 無限台のバスにそれぞれ無限人が乗って来ても, 定理2の番号づけを使えば全員泊められる. 「満室なのに泊められる」のは, 無限集合が真部分集合と対等になれるからである. 数学者ヒルベルトが講演で使ったたとえ話として知られている.

■ 練習問題

1. 次の2つの集合が対等であることを, 全単射を1つ作って示せ.

$$(1) \mathbb{N} \text{ と } \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 5\} \quad (2) (0, 1) \text{ と } (1, 3) \quad (3) [0, 1) \text{ と } (0, 1] \quad (4) \mathbb{R} \text{ と } (0, \infty)$$

2. $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ が可算であることを示せ.

3. A を空でない有限集合とする. $A \times \mathbb{N}$ が可算であることを示せ.

4. 素数全体の集合は可算であることを示せ. (素数が無限個あることは使ってよい. 分野「整数論」第5章 No.2 を参照.)

5. 定理2の全単射 $f(m, n) = \frac{(m+n-1)(m+n-2)}{2} + m$ について, $f(3, 4)$ を求めよ. また, $f(m, n) = 20$ となる (m, n) を求めよ.

6. $\mathbb{N}$ の有限部分集合全体の集合を F とする. $S \in F$ に $g(S) = \sum_{k \in S} 2^{k-1}$ ($g(\emptyset) = 0$) を対応させる写像 $g: F \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ が全単射であることを示し, F が可算であることを示せ.

7. (考えてみよう) 0 でない整数係数多項式の根 (複素数の範囲で考える) になる数を代数的数という. たとえば $\sqrt{2}$ ($x^2 - 2$ の根), i ($x^2 + 1$ の根), すべての有理数は代数的数である. 代数的数全体の集合は可算であることを示せ.

■ 練習問題の解答

- 例：(1) $n \mapsto n + 4$. (2) $x \mapsto 2x + 1$. (3) $x \mapsto 1 - x$. (4) $x \mapsto e^x$. いずれも逆写像 ((1) $m \mapsto m - 4$, (2) $y \mapsto \frac{y-1}{2}$, (3) $y \mapsto 1 - y$, (4) $y \mapsto \log y$) があるので全単射である.
- 例2より $\mathbb{Z}$ は可算なので, 定理3 (3) より $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ は可算.
- $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ とすると, $(a_i, n) \mapsto (i, n)$ により $A \times \mathbb{N}$ は $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ の部分集合 $\{1, \dots, k\} \times \mathbb{N}$ と対等. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ は可算なので, 定理3 (1) より $A \times \mathbb{N}$ は高々可算. $\{a_1\} \times \mathbb{N}$ を含むので無限集合で, 可算である.
- 素数全体は $\mathbb{N}$ の部分集合で, 無限集合なので, 定理3 (1) より可算.
- $m + n = 7$ なので $f(3, 4) = \frac{6 \cdot 5}{2} + 3 = 18$.
 $f(m, n) = 20$ のとき, $s = m + n$ は $\frac{(s-1)(s-2)}{2} < 20 \leq \frac{s(s-1)}{2}$ をみたす. $s = 7$ のとき $15 < 20 \leq 21$ なので $s = 7$. $m = 20 - 15 = 5$, $n = s - m = 2$. よって $(m, n) = (5, 2)$. (確かめ: $f(5, 2) = 15 + 5 = 20$.)
- $g(S)$ は, 2進法で「 k 桁目 (下から数えて) が1」 $\iff k \in S$ となる数である. たとえば $g(\{1, 3\}) = 1 + 4 = 5 = 101_{(2)}$. 0以上の整数はただ1通りに2進法で表せるので, 有限集合 S と0以上の整数が1対1に対応し, g は全単射である. $\mathbb{N} \cup \{0\} \sim \mathbb{N}$ ($n \mapsto n + 1$) なので, F は可算. ($\mathbb{N}$ の部分集合全体 $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ は可算ではないことを No.3 で示す. 「有限」という制限が効いている.)
- $\mathbb{Z}[x]$ から0を除いた集合を P とすると, 例題1より P は可算. $p \in P$ の根全体の集合 R_p は, p の次数以下の個数の有限集合である (定数多項式なら $R_p = \emptyset$). 代数的数全体は $\bigcup_{p \in P} R_p$ で, P は可算なので, その要素に番号をつけて $p_1, p_2, \dots$ と並べれば, 定理3 (4) より高々可算. $\mathbb{Z}$ を含むので無限集合で, 可算である. (この事実から, 代数的数でない実数 (超越数) が存在することが No.2 で分かる.)